

وبما أن التفافه من صفر إلى كامل كما يجب يأتي:

$$I = 2\pi i \left[\frac{2z+3}{(z-2)^2(z-i)} \right]_{z=1} + \frac{2\pi i}{1!} \left[\frac{2z+3}{(z-1)(z-i)} \right]_{z=2} + 2\pi i \left[\frac{2z+3}{(z+2)^2(z-1)} \right]_{z=i}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \left[\frac{5}{9(1-i)} + \frac{2(z-1)(z-i) - [(z-i) + (z-1)](2z+3)}{(z-1)^2(z-i)^2} \right]_{z=2} + \frac{2i+3}{(2+i)^2 - (1+i)}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \left[\frac{5}{9(1-i)} + \frac{2(-3)(-2-i) - (-2-i-2-1)(-1)}{(-3)^2(-2-i)^2} + \frac{3+2i}{(2+i)^2(-1+i)} \right]$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \left[\frac{5}{9(1-i)} + \frac{(12+6i) + (-5-i)}{9(3+4i)} + \frac{3+2i}{(3+4i)(-1+i)} \right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{5(1+i)}{18} + \frac{(7+5i)(3-4i)}{225} + \frac{3+2i}{-7-i} \right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{5+5i}{18} + \frac{41-13i}{225} + \frac{-23-11i}{50} \right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{25(5+5i)}{450} + \frac{82-26i}{450} + \frac{-207-99i}{450} \right]$$

$$I = 2\pi i \left[(125 + 82 - 207) + i(125 - 26 - 99) \right]$$

= 0

* ملاحظة:

مثال: أميب قيمة التكامل:

$$\int_{|Z|=4} \frac{1}{Z^2 + 3Z + 2} dZ = 0$$

الحل:

الكفاف المعطى هو الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R=4$.

النظام السامية للدالة المتكاملة هي جذور المعادلة:

$$Z^2 + 3Z + 2 = 0 \Rightarrow (Z+1)(Z+2) = 0$$

$$\Rightarrow Z_1 = -1, Z_2 = -2$$

ونلاحظ بناء النقطتان تقعان في داخل الكفاف.

نحيط النقطة الأولى $Z_1 = -1$ بدائرة C_1 نصف قطرها صغير.

والثانية $Z_2 = -2$ بدائرة C_2 نصف قطرها صغير.

صغير بقدر كاف ليكون: $C_1 \cap C_2 = \emptyset$

عندئذ:

بمساعدة آويلي - جوردان للناطق متعددة

الترابط فإن:

$$\int_C \frac{1}{Z^2 + 3Z + 2} dZ = \int_{C_1} \frac{1}{Z+1} dZ + \int_{C_2} \frac{1}{Z+2} dZ$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{Z+1} \right]_{Z=-1} + 2\pi i \left[\frac{1}{Z+2} \right]_{Z=-2}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{1} \right] + 2\pi i \left[\frac{1}{-1} \right] = 0$$

★ قاعدة : 88

- إذا كان لدينا تكامل من الشكل التالي :

$$\int_C \frac{P(z)}{q(z)} dz$$

حيث $P(z)$ و $q(z)$

عبارة عن كثير حدود . وكانت درجة المقام أكبر من درجة البسط . بشرطتان وماتحت .

وكانت جميع أقطار جذور المعادلة $q(z)=0$ تقع في داخلية C .

عندئذ :

تكون قيمة التكامل تساوي المجموع

$$\int_{|z|=5} \frac{\sin z}{(z+1)(z-3)} dz \neq 0$$

حيث $\neq 0$ لأن قيمة البسط ليست كثيرة حدود .

أي :

$$\int_{|z|=5} \frac{e^{zz}}{(z+1)(z-3)} dz \neq 0$$

لأن البسط ليس كثيرة حدود .

★ ملاحظة : حيث يمكننا تطبيق القاعدة على الأمثلة السابقة بسهولة ونسج . ويمكن استنتاجها .

★ ملاحظة :

- لنفرض f دالة تحليلية على المنطقة D .

ولتكن z_0 نقطة ثابتة في المنطقة D .

ولتكن z_1 نقطة تنتمي في المنطقة D .

لنصل بين z_0 و z_1 بأقواسين مختلفتين الشكل C_1 و C_2 .

عندئذ:

الكثافتين C_1 و C_2 - شكلان كثافت منقذ وبسيط
ولنفرض لنقالهما هنا الكثافت D .
وبالتالي اعتماداً على مبرهنة كوشي جوهرات للمناطق
البسيطة الترابط يكون:

$$\int_B f(s) \cdot ds = 0$$

حيث: B هو C_1 و C_2 .

واعتماداً على خواص التكامل فان:

$$\int_{C_1} f(s) \cdot ds + \int_{-C_2} f(s) \cdot ds = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(s) \cdot ds = - \int_{-C_2} f(s) \cdot ds$$

$$\Rightarrow \int_{Z_0}^Z f(s) \cdot ds = \int_{Z_0}^Z f(s) \cdot ds$$

من العلاقة المتطرفة نستنتج أولاً بأن:

قيمة تكامل دالة تحليلية لا تتغير بتغير المسار
الذي يصل بين نقطة البداية والنهاية.

 Z وهذا يعني أن التكامل $\int_{Z_0}^Z f(s) \cdot ds$

يعرف لنا دالة متغيرها هو الحد العلوي للتكامل.

أي أن:

$$F(Z) = \int_{Z_0}^Z f(s) \cdot ds$$

- لنثبت الآن أن $F(Z)$ دالة تحليلية أي أن $F(Z)$

$$F'(Z) = f(Z)$$

قابلة للاشتقاق

من أجل ذلك:

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(s) \cdot ds - \int_{z_0}^z f(s) \cdot ds$$

$$= \int_z^{z + \Delta z} f(s) \cdot ds$$

أدفع

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(s) \cdot ds$$

و منه فإن: *

$$\Rightarrow f(z) = \frac{f(z)}{\Delta z} \Delta z = \frac{f(z)}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} ds =$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(z) \cdot ds$$

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(s) - f(z) \cdot ds$$

و منه فإن:

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z + \Delta z} |f(s) - f(z)| |ds|$$

بما أن f دالة تحليلية بالفرص إذاً قابلة للتفاضل
وهذا يعني بدورها أنها دالة متصلة.

أي أنه يوجد $\delta > 0$ و $\epsilon > 0$ و $0 < \delta < \epsilon$.

بحيث أن: $|f(s) - f(z)| < \epsilon$ طالما أن $|s - z| < \delta$

وبالتالي، إذا كانت النقطة $z + \Delta z$ قريبة بما كفاً

من z و منه فإن: عندئذٍ:

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \epsilon |\Delta z| = \epsilon$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |ds| = |\beta - \alpha|$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = F'(z)$$

تذكروا

أي أن

$$f'(z) = f(z)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} ds = \beta - \alpha$$

من هنا نستنتج أن تكامل دالة تحليلية هو دالة تحليلية.

كذلك تكامل دالة تحليلية يمثل دالة التحليلية إذا كانت متصلة.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) \cdot dz = \int_{z_0}^{\beta} f(z) \cdot dz - \int_{z_0}^{\alpha} f(z) \cdot dz$$

$$= f(\beta) - f(\alpha) = f(z) \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

أي أن قيمة التكامل المتغير لحد دالة تحليلية يمثل التغير لدالة التحليلية إذا كانت متصلة عند حدي التكامل.

$$\int_0^{1+i} z^2 \cdot dz = \frac{z^3}{3} \Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3}$$

$$= \frac{2i(1+i)}{3} = \frac{-2 + 2i}{3}$$

مثال:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos z \cdot e^{\sin z} \cdot dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos z \cdot e^{\sin z} \cdot dz$$

$$= e^{\sin z} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^t \cdot dt \Rightarrow - [e^t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = - [e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}] = - [e^{\frac{\pi}{2}} - 1] =$$

★ مبرهنة القيمة العظمى لمقاييس الدوال :

ليكن f دالة تحليلية وغير ثابتة القيمة على القرص المفتوح $|z - z_0| < r$ الدائري.

ولكنه z نقطة من داخلية هذا القرص ولننظر C لدائرة التي مركزها z_0 ونصف قطرها r_1 ومحيث أن $|z - z_0| = r_1$ وبمعنى أن $r_1 < r$.

عندئذ:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot dz$$

حيث: $z - z_0 = r_1 e^{i\theta}$ عند $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r_1 e^{i\theta}) \cdot i r_1 e^{i\theta}}{r_1 e^{i\theta}} \cdot d\theta$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_1 e^{i\theta}) \cdot d\theta$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_1 e^{i\theta})| \cdot d\theta$$

وهذه المتباينة صحيحة في الحالة الخاصة عندما $r_1 = 0$

لنفرض أن: $|f(z)| \leq |f(z_0)|$

$$\Rightarrow |f(z_0 + r_1 e^{i\theta})| \leq |f(z_0)|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_1 e^{i\theta})| \cdot d\theta \leq |f(z_0)|$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{i\theta})| d\theta \leq |f(z_0)|$$

من (1 و 2) نستنتج أن:

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{i\theta})| d\theta$$

$$= 2\pi |f(z_0)| = \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{i\theta})| d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{i\theta})| d\theta$$

ومن هنا نحصل:

$$\int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + r e^{i\theta})|) d\theta = 0$$

بما أن الدالة f متصلة في منطقة وادالة متصلة عند z_0 ،
نستنتج أن $|f(z_0)| = |f(z_0 + r e^{i\theta})|$

$$|f(z_0)| = |f(z)|$$

هذا يعني أن الدالة f دالة ثابتة القيمة. وكان
هذا يناقض الفرض أن f متغيرة وغير
ثابتة القيمة. إذاً الفرض الجاهلي خاطئ. ما
أصبح:

$$|f(z)| > |f(z_0)|$$

واستناداً إلى ملاحظة سابقة في فقرة الاستقرار
نستنتج أن الدالة f تبلغ قيمها العظمى على «دائرة»
الدائرة» وبهذه الشكل نكون قد أثبتنا صحة المطرحة
التي.

★ **مبرهنة:** إذا كانت الدالة f متصلة على الألفاظ المغلقة والبسيطة C وتحليلية عند كل نقطة من نقاط داخلية C عندئذ:

الدالة f تبلغ قيمتها العظمى عند نقاط تقع على المحيط وليس في داخلية هذا الألفاف .

مثال: : لئانه لدينا الدالة :

$$f(z) = z^3 + 4z^2 - z$$

عند النقاط من القطر الدائري $|z| = 1$ والتي تبلغ عندها الدالة قيمتها العظمى .

الحل:

مع التمام : الدالة كثيرة حدود من درجة الثالثة فهي دالة متصلة أي تحليلية عند جميع نقاط المستوى العقدي . أي أنها تحليلية في النظام التي تقع في داخلية دائرة الوحدة .
وبما أنها تحليلية فهي قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستوى العقدي .

وهذا يعني بأنها متصلة عند كل نقطة من نقاط المستوى العقدي . أي متصلة عند النقاط $|z| = 1$.

مع مبرهنة القيم العظمى فإن الدالة تبلغ قيمتها العظمى على محيط القرص وليس عند أية نقطة من نقاط داخلية .

أي أن $|z| = 1$.

$$z = e^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

نفرض في المعادلة :

$$f(z) = e^{3i\theta} + 4e^{2i\theta} - e^{i\theta}$$

لكن :

$$|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}$$

$$= (e^{i3\theta} + 4e^{2i\theta} - e^{i\theta}) (e^{-i3\theta} + 4e^{-2i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$= 1 + 4e^{i\theta} - e^{2i\theta} + 4e^{-i\theta} + 16 - 4e^{i\theta} - e^{-i\theta} - 4e^{-i\theta} + 1$$

$$\Rightarrow = 18 - (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta})$$

$$|f(z)|^2 = 18 - 2 \left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} \right) =$$

$$= 18 - 2 \cos 2\theta$$

نلاحظ:

$$-1 \leq \cos 2\theta \leq 1 \quad \text{لكي يكون } 2\theta \text{ حقيقياً} \quad 2 \geq \cos 2\theta \geq -2$$

$$20 \geq 18 - \cos 2\theta \geq 16$$

أي أن:

$$18 - 2 \cos 2\theta = 20$$

$$\Rightarrow -2 \cos 2\theta = 2 \Rightarrow \cos 2\theta = -1$$

لأن دالة جيب دالة دورية

$$\Rightarrow 2\theta = \pi + 2n\pi \quad ; \quad n = 0, 1, \dots$$

نقسم على 2:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

نأخذ $n=0$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi]$$

وهذا هو:

نأخذ $n=1$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$z_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$